



# PERDAS DA FORÇA DE PROTENSÃO

**Autor: Profº. Manfred Theodor Schmid  
Rudloff Industrial Ltda.**

**2º Edição - 1998 - REV. 01**

# 2

**PUBLICAÇÃO TÉCNICA**

# ÍNDICE

| CAPÍTULO | DESCRIÇÃO                                    | PÁGINA |
|----------|--|--------|
| 1        | PERDAS IMEDIATAS                             | 3      |
| 1.1      | Perdas por atrito                            | 3      |
| 1.2      | Perdas por acomodação da ancoragem           | 5      |
| 1.3      | Perdas no equipamento de protensão           | 7      |
| 2        | PERDAS PROGRES. DA FORÇA DE PROTENSÃO        | 7      |
| 2.1      | Fluência e retração no concreto              | 7      |
| 2.1.1    | Fluência do concreto                         | 7      |
| 2.1.2    | Retração do concreto                         | 8      |
| 2.1.3    | Aplicações na prática                        | 9      |
| 2.2      | Fluência do aço - Relaxação                  | 10     |
| 2.3      | Perda progressiva total                      | 12     |
| 3        | CÁLCULO DOS ALONGAMENTOS DA ARMADURA         | 12     |
| 3.1      | Considerações iniciais                       | 12     |
| 3.2      | Cálculo aproximado do alongamento            | 12     |
| 4        | EXEMPLO NUMÉRICO                             | 13     |
| 4.1      | Cálculo de perdas imediatas e do alongamento | 13     |
| 4.2      | Cálculo de perdas progressivas               | 16     |
|          | BIBLIOGRAFIA                                 | 17     |

# PERDAS IMEDIATAS

## 1.1 Perdas por atrito

Nas peças pós-tracionadas, a armadura ativa ao ser posta em tensão pelo macaco sofre um alongamento gradativo que varia de zero até o valor final. Em consequência, e como a bainha apresenta quase sempre desenvolvimento curvo e sinuosidades involuntárias, surge o inevitável atrito entre o aço de protensão e a bainha.

Em função das forças de inflexão e do coeficiente de atrito " $\mu$ ", a perda da força de protensão devida ao atrito pode ser quantificada ao longo do cabo através da equação indicada na NBR 7197, item 8.5.1.2:

$$\Delta P_x = P_0 \cdot \left[ 1 - e^{-(\mu\alpha - kx)} \right], \text{ da qual tiramos}$$

$$P_0(x) = P_0 \cdot e^{-(\mu\alpha - kx)} \quad (\text{Euler Coulomb})$$

na qual:

$P_0$  = força de protensão na seção de abscissa  $x=0$ ; no tempo  $t = 0$ ;

$P_0(x)$  = força de protensão na seção de abscissa  $x$ , no tempo  $t = 0$ ;

$P_i$  = força máxima aplicada à armadura de protensão pelo equipamento de tração;

$\mu$  = coeficiente de atrito entre o aço e a bainha;

$\alpha$  = somatório dos ângulos de inflexão do cabo, não considerada a inclinação inicial  $\alpha_0$ ;

$k = \mu \gamma$ , sendo  $\gamma$  = coeficiente de perdas por metro, provocadas por curvaturas não intencionais. Varia com o diâmetro da bainha.

$\mu = 0.50$  entre cabo e concreto sem bainha;

$\mu = 0.30$  entre barras ou fios com mossas ou saliências e bainha metálica;

$\mu = 0.20$  entre fios lisos paralelos ou trançados e bainha metálica;

$\mu = 0.10$  entre fios lisos paralelos ou trançados e bainha metálica lubrificada.

|                           |        |        |        |           |
|---------------------------|--------|--------|--------|-----------|
| $\varnothing$ bainha (mm) | 30     | 40     | 50     | $\geq 60$ |
| (rad/m)                   | 0.015  | 0.010  | 0.008  | 0.006     |
| $k = \mu\gamma$           | 0.015m | 0.010m | 0.008m | 0.006m    |

Protensão aplicada em um extremo do cabo:

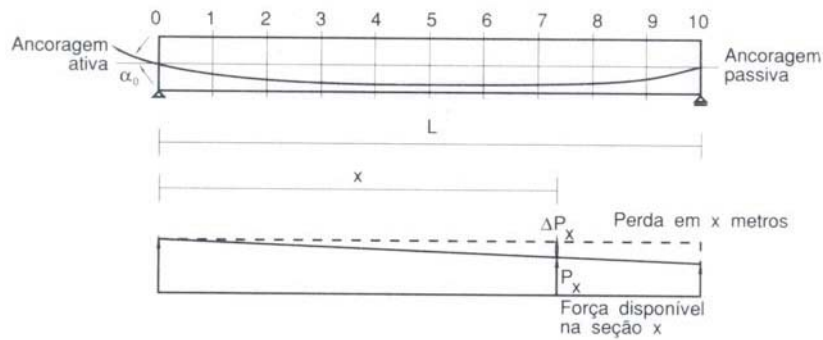


Fig. 1: Protensão aplicada em um extremo do cabo

Protensão aplicada nos dois extremos do cabo:

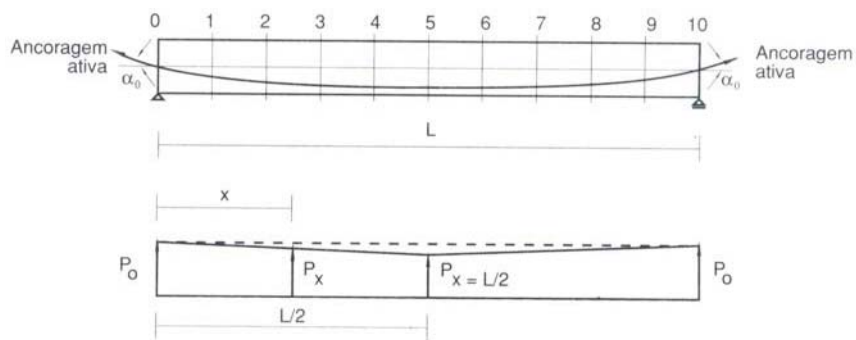


Fig. 2: Protensão aplicada nos dois extremos do cabo

Os diagramas mostrados nas figuras 1 e 2 indicam constância nas perdas de protensão, o que não acontece na realidade, uma vez que as forças de atrito dependem do coeficiente " $\mu$ " e do raio de curvatura dos cabos, ou seja, da pressão transversal " $p$ " que o cabo exerce contra a bainha ou contra o concreto.

Para exemplificar, tomemos dois cabos de mesmo comprimento e mesmo desvio angular, tendo o primeiro grandes raios de curvaturas e o segundo raios mínimos.

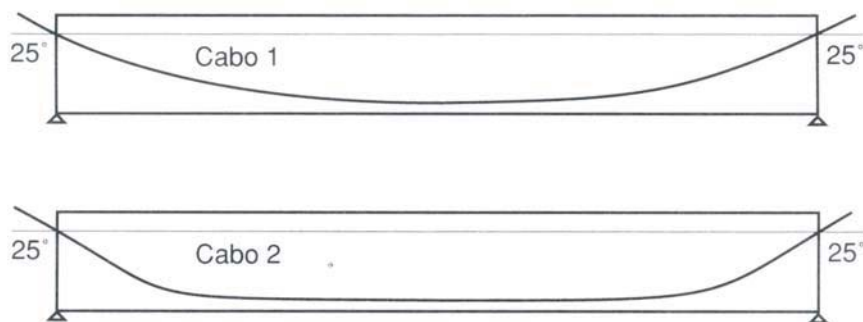


Fig. 3: Cabos com diferentes raios de curvatura

Protendendo os cabos pelos dois lados simultaneamente, o primeiro dará maior alongamento com igual esforço " $P_0$ " que o segundo, ou seja, terá menores atritos ao longo de sua trajetória.

## Conclusões práticas:

1. Embora pela equação de Euler-Coulomb o resultado teórico seja o mesmo, a força de atrito varia com a pressão unitária de contato, isto é, com o raio de curvatura do cabo. Para que esta pressão radial não se torne excessiva, ocasionando a destruição da bainha e o esmagamento do concreto, é necessário que os raios de curvatura do cabo não sejam inferiores aos valores mínimos abaixo indicados. Para que os componentes do feixe entrem na ancoragem da forma mais regular possível, é necessário existir o comprimento reto "L" mínimo anterior à ancoragem também abaixo indicado.

Cordoalha de 7 fios = Ø 1/2" (RB)

|                 |                 |                   |                  |                     |                     |
|-----------------|-----------------|-------------------|------------------|---------------------|---------------------|
| <b>cabo</b>     | <b>4 Ø 12,7</b> | <b>6-7 Ø 12,7</b> | <b>12 Ø 12,7</b> | <b>19-22 Ø 12,7</b> | <b>27-31 Ø 12,7</b> |
| <b>raio "R"</b> | 5,0m            | 6,0m              | 8,0m             | 11,0m               | 14,0m               |
| <b>"L"</b>      | 60 cm           | 70 cm             | 90 cm            | 130 cm              | 160 cm              |

Cordoalha de 7 fios = Ø 5/8" (RB)

|                 |                 |                   |                  |                     |                     |
|-----------------|-----------------|-------------------|------------------|---------------------|---------------------|
| <b>cabo</b>     | <b>4 Ø 15,2</b> | <b>6-7 Ø 15,2</b> | <b>12 Ø 15,2</b> | <b>19-22 Ø 15,2</b> | <b>27-31 Ø 15,2</b> |
| <b>raio "R"</b> | 8,0 m           | 9,0 m             | 12,0 m           | 16,0 m              | 21,0 m              |
| <b>"L"</b>      | 80 cm           | 100 cm            | 135 cm           | 190 cm              | 235 cm              |

2. Os coeficientes numéricos e as considerações aqui apresentadas subentendem execução cuidadosa e observância das regras de boa execução do concreto protendido, supondo-se naturalmente que não haja infiltração da calda de cimento durante a concretagem.

3. O coeficiente de atrito " $\mu$ " aumenta com a presença de Óxido de Ferro, seja nas cordoalhas, seja na parede da bainha.

4. Temos observado que os alongamentos medidos em obra são quase sempre menores que os teóricos porque subestimamos o coeficiente " $\mu$ " e principalmente o coeficiente " $k = \mu\alpha$ ," das curvaturas não intencionais. O fato merece atenção a fim de que a estrutura não fique com falta de protensão.

## 1.2 Perdas por acomodação das ancoragens

A acomodação das cunhas nas ancoragens (cravação) provoca uma perda de 4 a 5 mm no alongamento inicial ao qual se chegou antes da cravação.

Como a força gerada pelo atrito tem sempre sentido oposto ao do movimento do cabo, por ocasião do recuo acima, ela irá se opor ao mesmo, dando origem a um atrito negativo.

Na expressão:

$$\Delta p = \frac{P_0 - P_x}{x}$$

$\Delta p$  é a variação da força de protensão por unidade de comprimento e ocasiona a inclinação do diagrama das perdas. Com o atrito negativo, esta inclinação terá o sinal trocado, isto é, após a perda devida a cravação ocorrerá um aumento  $\Delta p/m$  até que o diagrama ascendente encontre em  $x = x_r$  o diagrama original descendente (Fig. 4).

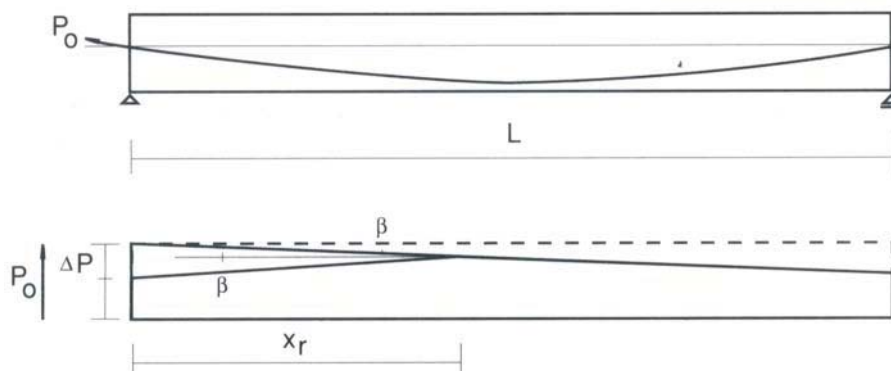


Fig. 4: Perdas por acomodação da ancoragem

$x_r$  depende de  $\alpha$ ,  $\mu$  e  $\kappa$  mas em cabos curvos seu valor costuma estar entre 12 e 16 m, razão pela qual tomamos 16,0 m como referência para o cálculo de  $\Delta p$  (veja-se o exemplo adiante).

Sejam:

$\lambda_r$  = recuo devido à cravação das colunas (cm);

$A_p$  = área da seção transversal do cabo (cm<sup>2</sup>);

$\Delta p$  = perda da força de protensão por unidade de comprimento nos 16,0 m iniciais (kN/cm);

$\Delta P$  = perda da força de protensão junto à ancoragem, devida à cravação das cunhas (kN);

$E_p$  = módulo de elasticidade do aço (kN/cm<sup>2</sup>);

$f = \Delta p \cdot x_r$  = perda da força de protensão no comprimento  $x = x_r$ .

Pela Lei de Hooke:

$$\lambda_r = \frac{f \cdot x_r}{A_p \cdot E_p} = \frac{\Delta p \cdot x_r^2}{A_p \cdot E_p} \quad \therefore \quad x_r = \sqrt{\frac{\lambda_r \cdot A_p \cdot E_p}{\Delta p}}$$

Conseqüentemente, a perda de protensão junto a ancoragens valerá:

$$\Delta P = 2 \cdot \Delta p \cdot x_r \quad (\text{kN})$$

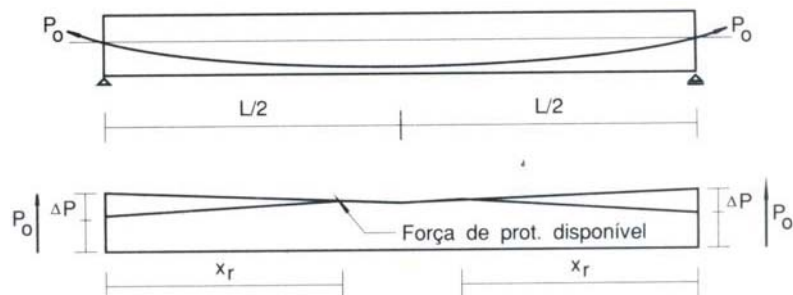


Fig. 5: Perdas por acomodação da ancoragem

### 1.3 Perdas no equipamento de protensão

As perdas por atrito que ocorrem internamente no macaco de protensão podem ser avaliadas em 2,5 % do esforço da protensão. Portanto, o projetista deve levar em conta este valor por ocasião do cálculo final do esforço da protensão.

## PERDAS PROGRESSIVAS DA FORÇA DE PROTENSÃO

As perdas progressivas decorrem da natureza intrínseca dos materiais aço e concreto e são devidas a uma diminuição de volume de concreto, decorrente dos fenômenos de retração e deformação lenta. São devidas também à fluência do aço, à qual corresponde uma relaxação, isto é, perda de tensão.

### 2.1 Fluência e retração do concreto

#### 2.1.1 Fluência do concreto (NBR 7197 – 7.1)

A fluência ou deformação lenta do concreto é o encurtamento do mesmo devido à ação de forças permanentemente aplicadas.

A fluência  $\epsilon_{cc}$  varia linearmente com a tensão aplicada e compõe-se de uma parte rápida e uma parte lenta. A parte rápida  $\epsilon_{cca}$  é irreversível. A lenta é composta pela deformação reversível  $\epsilon_{ccd}$  e irreversível  $\epsilon_{ccf}$ . Portanto:

$$\epsilon_{cc} = \epsilon_{cca} + \epsilon_{ccf} + \epsilon_{ccd}$$

Se considerarmos também a deformação elástica inicial  $\epsilon_c$ , a deformação total do concreto devida à ação das formas externas aplicadas será

$$\epsilon_{ct} = \epsilon_c + \epsilon_{cc}$$

ou ainda:

$$\varepsilon_{ct} = \varepsilon_c + \varepsilon_{cc} (\varepsilon_c / \varepsilon_c) = \varepsilon_c + \varepsilon (\varepsilon_{cc} / \varepsilon_c)$$

$$\varepsilon_{ct} = \varepsilon_c + \phi \varepsilon_c = \varepsilon_c (1 + \phi)$$

$\phi$  denomina-se coeficiente de deformação lenta e permite expressar a deformação por fluência e  $\varepsilon_{cc}$  em função da deformação elástica, ou seja:

$$\varepsilon_{cc} = \phi \varepsilon_c$$

O coeficiente  $\phi$  se compõe de três partes:

$$\phi = \phi_a + \phi_r + \phi_d, \text{ sendo:}$$

$\phi_a$  = coeficiente de fluência rápida - depende da resistência do concreto;

$\phi_r$  = coeficiente de fluência lenta irreversível - depende da umidade relativa do ambiente, da consistência do concreto, da espessura fictícia e da idade fictícia do concreto;

$\phi_d$  = coeficiente de fluência lenta reversível.

Considerando-se pois que o concreto tem uma idade fictícia  $t$  no instante considerado e tinha uma idade fictícia  $t_0$  ao ser aplicada a carga, a expressão acima fica:

$$\phi(t, t_0) = \phi_a + \phi_{r\infty} [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] + \phi_{d\infty} \beta_d \quad \text{NBR 7197 - 7.1.3}$$

Na maioria dos casos da prática, porém, interessa-nos apenas a fluência final (no tempo  $t_\infty$ ) e o coeficiente correspondente pode ser retirado da tabela 4 dessa Norma.

### 2.1.2 Retração do concreto (NBR 7197 - 7.2)

Retração é o encurtamento do concreto devido à evaporação da água desnecessária à hidratação do cimento. A retração depende da umidade relativa do ambiente, da consistência do concreto no lançamento e da espessura fictícia da peça.

O valor da retração entre os instantes  $t_0$  e  $t$  é dado no item 7.2.1 da Norma pela expressão:

$$\varepsilon_{cs} (t, t_0) = \varepsilon_{cs \infty} [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)]$$

Também aqui, na maioria dos casos interessa apenas a retração final  $\varepsilon_{cs \infty}$ , cujo valor para obras correntes pode ser tirado da tabela 4 em função da idade fictícia do concreto ( $t_0 = 5, 30$  ou  $60$  dias) no instante em que o efeito da retração começa a ser considerado.

NBR 7197 - Tab. 4: Valores particulares para estimativas preliminares ou para obras correntes realizadas com concreto plástico, correspondentes a abatimentos de 5 a 9 cm.



| UMIDADE                           |              | U = 40% |       | U = 55% |       | U = 75% |       | U = 90% |       |
|-----------------------------------|--------------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|
| RELAÇÃO GEOMÉTRICA<br>2Ac cm / u  |              | 20      | 60    | 20      | 60    | 20      | 60    | 20      | 60    |
| FLUÊNCIA<br>$\phi_{\infty}$       | to = 5 dias  | 4,4     | 3,9   | 3,8     | 3,3   | 3,0     | 2,6   | 2,3     | 2,1   |
|                                   | to = 30 dias | 3,0     | 2,9   | 2,6     | 2,5   | 2,0     | 2,0   | 1,6     | 1,6   |
|                                   | to = 60 dias | 3,0     | 2,6   | 2,2     | 2,2   | 1,7     | 1,8   | 1,4     | 1,4   |
| RETRAÇÃO<br>$\epsilon_{cs\infty}$ | to = 5 dias  | -0,44   | -0,39 | -0,37   | -0,33 | -0,23   | -0,21 | -0,10   | -0,09 |
|                                   | to = 30 dias | -0,37   | -0,38 | -0,31   | -0,31 | -0,20   | -0,20 | -0,09   | -0,09 |
|                                   | to=60 dias   | -0,32   | -0,36 | -0,27   | -0,30 | -0,17   | -0,19 | -0,08   | -0,09 |

### 2.1.3 Aplicação prática

Reunindo os efeitos da fluência e da retração do concreto, a conseqüente perda de tensão na armadura ativa em cada seção pode ser obtida pela expressão do item 8.5.2 da NBR 7197 ou pela expressão seguinte:

$$\Delta\sigma_p^{cs} = \frac{\left(\frac{N_p}{A_c} + \frac{M_{pg}}{W_{c,p}}\right) \frac{\phi_{\infty}}{E_c} + \epsilon_{cs\infty}^s}{1 + k(1 + 0,5)\phi_{\infty}} E_p$$

Nesta expressão:

$N_p$  = componente normal de P na seção;

$E_c = E_{c_{28sec}}$  = módulo de deformação do concreto;

$M_{pg} / W_{c,p}$  = tensão normal do momento da protensão  $P_{\infty}$  e da carga permanente g, na seção considerada;

$\phi_{\infty}$  = coeficiente final de fluência;

$\epsilon_{cs\infty}$  = retração final;

$E_p$  = módulo de deformação do aço de protensão;

k = coeficiente de rigidez da seção considerada.

$$k = \alpha \cdot A_p \left( \frac{1}{A_c} + \frac{e}{W_{c,p}} \right)$$

Sendo:

$\alpha = E_p / E_c$ ;

$A_c$  = seção transversal de concreto;

$A_p$  = seção transversal da armadura de protensão;

e = excentricidade do cabo na seção considerada;

$W_{c,p}$  = módulo de resistência da seção, na altura do cabo.

#### Observações:

1. A expressão de  $\Delta\sigma_p^{cs}$  (Ref. 1) foi obtida a partir da deformação elástica e da deformação plástica, bem como da coerência de deformações entre o aço e o concreto.
2.  $N_p / A_c$  e  $M_{pg} / W_{c,p}$  são perdas de tensão normal de compressão, portanto equivalem a tensões de tração e têm por isso sinal positivo.
3. Para estimativas preliminares de obras correntes realizadas com concreto plástico, os valores de  $\phi_\infty$  e  $\epsilon_{cs}$  podem ser tirados da tabela 4 (NBR 7197).
4. Sendo necessário conhecer  $\phi$  e  $\epsilon_{cs\infty}$  entre os tempos 0 e t, basta seguir os itens 7.1.3 e 7.2.2 da NBR 7197.
5. No caso particular da armadura ativa estar no baricentro da seção (como por exemplo no caso de tirantes e pilares protendidos), tem-se:

$$e = 0 \quad M_{pg}/W_{c,p} = 0 \quad K = \alpha A_p / A_c$$

e portanto:

$$\Delta\sigma_p^{cs} = \frac{\frac{N_p}{A_c} + \frac{\phi_\infty}{E_c} + \epsilon_{cs}^s}{1 + \alpha \frac{A_p}{A_c} (1 + 0,5 \phi_\infty)} E_p$$

## 2.2 Fluência do aço – Relaxação

Fluência do aço vem a ser o alongamento que o mesmo sofre no decorrer do tempo quando mantido sob tensão constante. Há tratamentos térmicos que permitem amenizar o valor destas perdas (aços de relaxação baixa RB).

A perda de tensão  $\Delta\sigma_{pr}$  nas armaduras protendidas, devida à relaxação pura do aço desde o instante “to” do estiramento de armadura até o instante “t”, é dada pela expressão:

$$\Delta\sigma_{pr}(t, t_0) = \Psi(t, t_0) \sigma_{pi} \quad (\text{NBR 7197 - 7.5})$$

na qual:

$\Psi(t, t_0)$  = coeficiente de relaxação do aço entre os tempos  $t_0$  e t;

$\sigma_{pi}$  = tensão na armadura de protensão resultante da força de protensão efetiva, isto é, após o desconto das perdas imediatas (atrito e cravação).

Os valores de relaxação são fixados nas especificações dos aços de protensão empregados.

A tabela a seguir (Tab. 5, NBR 7197) fornece os valores de relaxação para os aços que a 20°C foram submetidos durante 1000h a tensão de  $0,60f_{ptk}$ ,  $0,70f_{ptk}$  e  $0,80f_{ptk}$  respectivamente.



NBR 7197 - Tab. 5 Valores de  $\Psi_{1000}$  (em %) (para 1000 horas e 20°C) obras

| TENSÃO INICIAL               | CLASSE DE RELAXAÇÃO |                 |
|------------------------------|---------------------|-----------------|
|                              | RELAXAÇÃO NORMAL    | RELAXAÇÃO BAIXA |
| $\sigma_{pi} = 0,60 f_{ptk}$ | 4,5                 | 1,5             |
| $\sigma_{pi} = 0,70 f_{ptk}$ | 7,0                 | 2,5             |
| $\sigma_{pi} = 0,80 f_{ptk}$ | 12,0                | 3,5             |

Para tempos diferentes de 1000h, porém sempre a 20°C, os coeficientes de relaxação podem ser determinados pela expressão:

$$\Psi(t, t_0) = \Psi_{1000} \cdot (t - t_0/1000)^{0,15}$$

Assim, por exemplo, após 5 anos = 43800 h:

$$\Psi(t, t_0) = \Psi_{1000} \cdot (43800/1000)^{0,15} = 1,76 \Psi_{1000}$$

Como quase sempre interessa apenas o valor final, costuma-se adotar:

$$\Psi_{\infty} = 2 \cdot \Psi_{1000}$$

Na expressão  $\Delta\sigma_{pr}(t, t_0) = \Psi(t, t_0)\sigma_{pi}$  considerou-se o comprimento da armadura constante, o que não corresponde à realidade, uma vez que a retração e a fluência do concreto alteram as dimensões iniciais.

Parece-nos oportuno, de fácil utilização e programação a fórmula de comprovação experimental baseada no CM CEB-FIP

$$\Delta\sigma_p(t, t_0) = \Psi_{\infty} (\sigma_{pi} - 2\Delta\sigma_{pcs})$$

na qual:

$\sigma_{pi}$  = já definido anteriormente;

$\Delta\sigma_p^{cs}$  = já definido anteriormente;

$$\Psi_{\infty} = 2 \cdot \Psi_{1000}$$

Para  $\sigma_{pi} < 0,5 f_{ptk}$ , admite-se não haver perdas de tensão por relaxação (NBR 7197).

### 2.3 Perda progressiva total

Os valores finais das perdas de tensão na armadura ativa resultarão da soma dos valores acima abordados:

$$\Delta\sigma_{p,csr} = \Delta\sigma_{p,cs} + \Delta\sigma_{pr}$$

## CÁLCULOS DOS ALONGAMENTOS DA ARMADURA ATIVA

### 3.1 Considerações iniciais

Tanto o projetista quanto o engenheiro de obra têm no alongamento dos cabos de protensão um parâmetro de suma importância, pelo qual podem saber se a força de protensão gerada no macaco foi realmente transmitida ao concreto e sem anormalidades. O projetista calcula o alongamento teórico, o executor mede o alongamento real; a comparação dos dois valores permite uma avaliação do comportamento real do cabo no interior do concreto durante e após a protensão.

### 3.2 Cálculo aproximado do alongamento

O cálculo do alongamento teórico do cabo é feito a partir da Lei de Hooke, podendo-se empregar a expressão:

$$\lambda_p = \sigma_p^m \cdot \frac{L}{E_p}$$

na qual:

$\sigma_p^m$  = tensão média na armadura ativa, já consideradas as perdas imediatas;

L = comprimento do cabo correspondente ao alongamento que está sendo calculado, incluindo o trecho reto

L<sub>r</sub> = fora do concreto;

E<sub>p</sub> = módulo do aço de protensão.

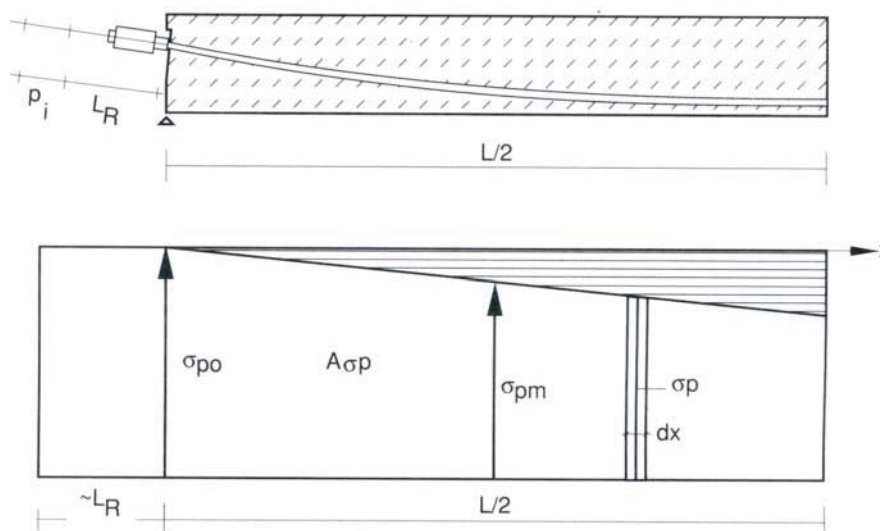


Fig. 6: Cálculo aproximado do alongamento

No canteiro da obra será medido o deslocamento progressivo de uma referência "R" marcado sobre a armadura. O esforço de protensão desenvolvido pelo macaco será conhecido pelas pressões crescentes registradas no manômetro a ele acoplado.

Em geral, a armadura ativa se apresenta com traçado simétrico em relação à peça de concreto a ser protendida. Caso a protensão seja feita por ambas as extremidades do cabo, o alongamento de protensão será a soma das deformações contadas a partir da reação central.

## EXEMPLO NUMÉRICO

### 4.1 Cálculo de perdas imediatas e do alongamento

Na viga abaixo esquematizada, o perfil do cabo de protensão de 6 cordoalhas de  $\varnothing 12,7$  mm é formado por uma seqüência de segmentos parabólicos.

Calcular a variação da força de protensão ao longo do cabo em decorrência das perdas imediatas (atrito e cravação), bem como o alongamento teórico do cabo.

Valores adotados:

$$\mu = 0,15;$$

$$\gamma = 0,008;$$

$$k = \mu \gamma = 1,2 \cdot 10^{-3};$$

$$\lambda_r = 5\text{mm};$$

$$E_p = 19500 \text{ kN/cm}^2;$$

$\sigma_p$  = tensão máxima permitida pela Norma;

$$\sigma_{pi} = 0,77 \cdot 187 = 144,0 \text{ kN/cm}^2;$$

Obs.: O valor 187 está de acordo com a Norma ABNT NBR 7483 – Carga de Ruptura Mínima para Cordoalha CP 190 RB Ø 12,7 mm.

Força de protensão na seção A, considerando-se que no macaco já ocorreu uma perda de 2,5% e 1,002 cm<sup>2</sup> = área transversal de uma cordoalha Ø ½":

$$P_o = 144,0 \cdot 1,002 \cdot 6 \cdot 0,975 = 844,08 \text{ kN}$$

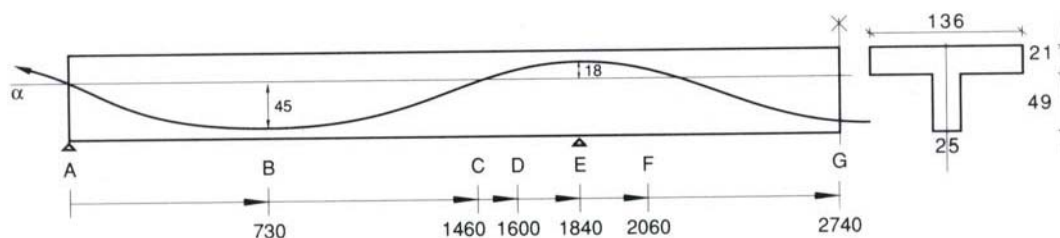


Fig. 7: Exemplo numérico

### 1. Cálculo das perdas por atrito

O valor de  $\alpha$  entre o ponto de aplicação do macaco e um ponto x pode ser obtido a partir de inclinações do perfil parabólico.

$$\alpha = \alpha_o - \alpha_x = 8f / L^2 \cdot x$$

$$\alpha_B = \alpha_o = 4f / L = 4 \cdot 45 / 1460 = 0,123 \text{ rad}$$

$$\alpha_D = \alpha_B + 4f_E / L_{DF} = 0,123 + 4 \cdot 18 / 2 \cdot 240 = 0,123 + 0,150 = 0,273 \text{ rad}$$

$$\alpha_E = 0,273 + 0,150 = 0,423 \text{ rad}$$

$$\alpha_F = 0,423 + 0,150 = 0,573 \text{ rad}$$

$$\alpha_G = 0,573 + 0,150 = 0,723 \text{ rad}$$

| SEÇÃO                   | A | B      | C      | D      | E      | F      | G      |
|-------------------------|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| x (cm)                  | 0 | 730    | 1460   | 1600   | 1840   | 2080   | 2740   |
| $\alpha$                | 0 | 0,1230 | 0,2730 | 0,2730 | 0,4230 | 0,5730 | 0,7230 |
| $\mu\alpha$             | 0 | 0,0185 | 0,0410 | 0,0410 | 0,0635 | 0,0860 | 0,1085 |
| kx                      | 0 | 0,0088 | 0,0175 | 0,0192 | 0,0221 | 0,0250 | 0,0329 |
| $\mu\alpha + kx$        | 0 | 0,0273 | 0,0585 | 0,0602 | 0,0856 | 0,1110 | 0,1414 |
| $e^{-(\mu\alpha + kx)}$ | 1 | 0,9730 | 0,9430 | 0,9410 | 0,9180 | 0,8940 | 0,8680 |

|                     |        |         |         |         |         |         |         |
|---------------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\sigma_{pi}$ (MPa) | 1496   | 1455,60 | 1410,72 | 1407,73 | 1373,32 | 1337,42 | 1298,58 |
| $P_x$ (kN)          | 899,39 | 875,11  | 848,13  | 846,33  | 825,64  | 804,06  | 780,67  |

## 2. Cálculo das perdas por cravação

Trecho AD:

$$\Delta P = \frac{P_x - P}{x} = \frac{899,39 - 846,33}{1600} = 0,0332 \text{ kN/cm}$$

Cravação:

$$x_r = \sqrt{\frac{\lambda_r \cdot A_p \cdot E_p}{\Delta p}} = \sqrt{\frac{0,5 \cdot 6,01 \cdot 19500}{0,0332}} = 1328 \text{ cm}$$

$$\Delta P = 2\Delta p \cdot x_r = 2 \cdot 0,0332 \cdot 1328 = 88,18 \text{ kN}$$

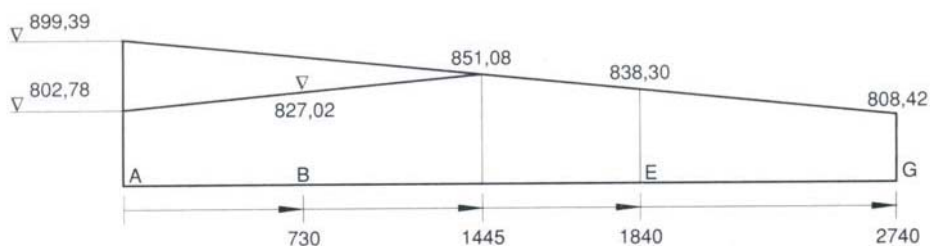


Fig. 8: Exemplo numérico - perdas

## 3. Cálculo do alongamento do cabo

Tensão média do trecho AG (metade do comprimento):

$$\sigma_p^m = \frac{899,39 + 808,42}{2 \cdot 6 \cdot 1,002} = 142,33 \text{ kN/cm}^2$$

Alongamento em cada lado:

$$r = \frac{\sigma_p^m \cdot L}{E_p} = \frac{142,33 \cdot 2740}{19500} = 19,96 \text{ cm}$$

## 4. Tensão máxima no manômetro do macaco

$$\sigma_{\text{máx}} = 899,39 / \text{área do êmbolo do macaco}$$

## 4.2 Cálculo de perdas progressivas

Calcular para a seção B desta mesma viga a perda de protensão proveniente da retração e fluência do concreto e da relaxação do aço. Considerar para a seção B:

$M_g = 303,96$  kNm – momento da carga permanente;

$M_p = 372,15$  kNm – momento devido à protensão;

$M_{pg} = 303,96 - 372,15 = -68,19$  kNm;

$N_p = 872,02$  kN – componente normal da protensão;

$\epsilon_{cs} = 0,28 \cdot 10^{-3}$  - retração do concreto no tempo  $\infty$ ;

$\phi_s = 2,2$  – coeficiente de fluência do concreto;

$E_c = 3047$  kN/cm<sup>2</sup> - módulo de elasticidade secante do concreto.

1. Perdas devidas à retração e fluência do concreto na seção B:

$$\Delta\sigma_p^{cs} = \frac{\left(\frac{N_p}{A_c} + \frac{M_{pg}}{W_{cp}}\right) \frac{\phi_{\infty}}{E_c} + \epsilon_{cs}^s}{1 + k(1 + 0,5\phi_{\infty})} E_p$$

$$\Delta\sigma_p^{cs} = \frac{\left(\frac{827,02}{4081} + \frac{6819}{31116}\right) \frac{2,2}{E_c} + 0,00023}{1 + 0,0651(1 + 0,5 \cdot 2,2)} 19500 = 9,17 \text{ kN/cm}^2$$

2. Relaxação do aço:

$$\Delta\sigma_p(t, t_0) = \psi_{\infty} (\sigma_{pi} - 2\Delta\sigma_p^{cs})$$

$$\sigma_{pi} = \frac{827,02}{6 \cdot 1,002} = 137,56 \text{ kN/cm}^2 \quad \therefore \quad \frac{\sigma_{pi}}{f_{ptk}} = \frac{137,56}{190} = 0,72$$

$$\therefore \quad \psi = 2,7 \quad \psi_{\infty} = 2 \cdot 2,7 = 5,4$$

$$\Delta\sigma_{pr}^{cs} = \frac{5,4}{100} (137,56 - 2 \cdot 9,17) = 6,43 \text{ kN/cm}^2$$

A perda lenta total na seção B valerá então:

$$\Delta\sigma_{pr}^{cs} = 9,17 + 6,43 = 15,60 \text{ kN/cm}^2$$

Para as demais seções, o procedimento é o mesmo, sendo que as perdas lentas da força de protensão variam de seção para seção, mas as diferenças entre elas em geral são pequenas.



# BIBLIOGRAFIA

- 1 - FRITSCH, ERWINO – *Concreto protendido*. Notas de aula, UFRGS, 1985
- 2 – SCHMID, MANFRED – *Concreto protendido – A protensão parcial do concreto*. Vol. 1, UFPR, 1987.
- 3 – RUDLOFF, JOSÉ – *Influência do raio de curvatura nos atritos de um cabo de protensão*. Publicação interna da Rudloff – VSL Industrial Ltda.
- 4 – *Perdas da força de protensão – Cálculo exemplo – Sistemas VSL Engenharia S.A.* – Publicação interna.
- 5 – *Normas – CEB-FIP Model Code 1978 – NBR 7197*

Notações: As notações estão indicadas no texto, junto às respectivas fórmulas e aplicações. De modo geral são empregadas as notações das Normas NBR 6118 e NBR 7197.

**Direitos Autorais de propriedade da Rudloff Industrial Ltda.  
Permitida a reprodução desde que mencionada a fonte.**

